Stand der MHD-Stabilitätstheorie von axialsymmetrischen toroidalen Gleichgewichten mit kreisförmigen und elongierten Plasmaquerschnitten.

Otto Gruber

IPP 1/152 März 1975

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Stand der MHD-Stabilitätstheorie von axialsymmetrischen toroidalen Gleichgewichten mit kreisförmigen und elongierten Plasmaquerschnitten.

Otto Gruber

IPP 1/152 März 1975

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 1/152 Otto Gruber Survey on the MHD Stability Theory of Axisymmetric Toroidal Equilibria with Circular and Elongated Plasma Cross-sections.

March 1975 (in German)

Abstract

A survey of the MHD stability of axisymmetric toroidal equilibria with circular and "vertical", non-circular plasma cross-sections is given. The influence of the toroidal current density distribution, the diamagnetic poloidal currents, the plasma conductivity and the toroidal aspect ratio is discussed. A comparison of non-circular with circular cross-sections shows the same stability behaviour of the internal kink modes. Furthermore, the stability of localized modes is improved if diamagnetic currents (necessary for high-ß values) and D-shaped cross-sections are taken into account. Stabilization of both modes calls for a q-value on the magnetic axis of about 1. To stabilize the external kink modes, both adequate shear (vanishing current density at the plasma surface) as in a circular cross-section and small curvature at the ends of the elongated plasma cross-section are necessary. The stabilizing effect of diamagnetic poloidal currents also exists for the external modes except for the surface current model.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung 1

2. Helikale MHD-Instabilitäten und lokalisierte Moden bei kreisförmigem Plasmaquerschnitt 2

3. Oberflächenmoden (Externe Kink-Moden) 6

3.1 Einfluß der Stromdichteverteilung auf $m \geqslant 2$ Moden 6

3.2 Einfluß von diamagnetischen poloidalen Strömen 13

4. Erreichbare ß-Werte für stabile kreisförmige Plasmen 16

5. MHD-Stabilität von nichtkreisförmigen Plasmen 19

5.1 Lokalisierte Moden und interne Kink-Moden 19

5.2 Externe Kink-Moden 21

6. Vergleich der Stabilitätsrechnungen mit den Belt-Pinch-Experimenten 27

Literaturverzeichnis 29

1. Einleitung

Der Einschluß von axialsymmetrischen toroidalen Plasmen mit nichtfreisförmigen Plasmaquerschnitten wird sowohl theoretisch als auch experimentell in zunehmendem Maße untersucht. Neben der Möglichkeit eines axialsymmetrischen Divertors in solchen Konfigurationen zeigen theoretische Überlegungen, daß die ß-Werte und ohmsche Heizung in einem Tokamk mit elongiertem Querschnitt ergeblich ansteigen können. Diese Eigenschaft beruht auf der intuitiven Idee, daß das Stabilitätsverhalten der MHD-Moden nur vom radialen Verlauf und vom Wert der Rotationstransformation bzw. des Sicherheitsfaktors q +) an der Plasmaoberfläche, nicht aber von der Plasmaform abhängt (s. Abschnitt 4).

So haben die experimentellen Ergebnisse am Belt-Pinch II gezeigt, daß nicht-kreisförmige Plasmaquerschnitte (Halbachsenverhältnis $\frac{b}{a} \approx 14$) bei hohen β-Werten ($\langle\beta\rangle = \frac{8\pi\langle p\rangle}{B^2} \approx 0.5$) für 80 μs stabil sein können /1/. Dabei ist der am Plasmarand notwendige Sicherheitsfaktor $q_a > 3{,}5$ mit den in kreisförmigen Plasmen (Tokamak) bei niedrigem $\langle\beta\rangle \lesssim 0{,}01$ benötigten Werten vergleichbar. Diese Ergebnisse sind im Widerspruch zu Stabilitätsrechnungen für elliptische Plasmen mit Oberflächenströmen /2/. Danach müßten Plasmen mit $\frac{b}{a} \approx 10$ und einem Aspektverhältnis $A = R_p / a \lesssim 5$ für $\beta > 1$ % gegen langwellige höhere m-Moden instabil sein (m poloidale Wellenzahl; a Plasmaradius; R_p toroidaler Radius des Plasmamittelpunkts). Zur Klärung dieser unterschiedlichen Aussagen von Experiment und Oberflächenstrommodell soll nun im folgenden ein Überblick über die MHD-Stabilität von stromführenden axialsymmetrischen Plasmen mit $B_t > B_p$ gegeben werden. Insbesondere wird der Einfluß der toroidalen Stromdichteverteilung, der diamagnetischen poloidalen Ströme und des Aspektverhältnisses diskutiert. Im ersten Teil werden nur kreisförmige Plasmen betrachtet, während im zweiten Teil auf elongierte, vertikale Plasmaquerschnitte eingegegangen wird.

+) q ist der Mittelwert des lokalen q über eine magnetische Oberfläche

$$q = \oint \frac{B_t \, d\ell_p}{B_p \, 2\pi R} = \frac{2\pi}{\iota} \qquad (1)$$

(R toroidaler Radius, B_t, B_p lokale toroidale bzw. poloidale Magnetfelder, $d\ell_p$ poloidales Linienelement).

2. Helikale MHD-Instabilitäten und lokalisierte Moden bei kreisförmigen Plasmaquerschnitten

Linearisierte Stabilitätsrechnungen für zylindrische stromführende Plasmen ($j \parallel z$ -Achse) mit einem inneren longitudinalen Magnetfeld B_{ti} und mit einem äußeren Feld B_{ta} führen zu instabilen helikale Eigenmoden

$$\vec{\xi}(r, \theta, z) = \vec{\xi}(r)\, e^{i(kz + m\theta) + \omega_i t}$$

Dabei ist $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die longitudinale Wellenzahl und ω_i die Anwachsrate der instabilen Mode /3/. Die Geometrie ist in Fig. 1 dargestellt, wobei für das zylindrische Koordinatensystem r, θ, z die Koordinaten φ und z identisch sind. Ist $B_{ta} > B_p$ so sind die langwelligen Moden mit $k \cdot r < m$ am instabilsten. Die toroidale Geometrie wird zunächst nur durch die endliche Länge des Plasmas berücksichtigt, d.h. die Wellenzahl k kann nur noch diskrete Werte $k = n/R$ annehmen (n ganzzahlig).

Das instabile Verhalten wird wesentlich durch die Leitfähigkeit des Plasmas im Gefäß bestimmt. Existiert ein Vakuum mit Leitfähigkeit $\sigma = 0$ zwischen dem ideal leitenden Plasma und der leitenden Wand, so ist die Plasmaoberfläche eine "freie Oberfläche" und die Normalenkomponente der MHD-Eigenmoden $\vec{\xi}$ können dort endlich sein ($\vec{n} \cdot \vec{\xi} \neq 0$). Reicht das leitfähige Plasma bis zur Wand, dann existiert dort eine "feste Oberfläche" mit $\vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0$. Zur Veranschaulichung ist in Fig. 2 der qualitative Verlauf der Anwachsrate der m = 1 Mode als Funktion von $n \cdot q = kr \frac{B_t}{B_p}$ an der Plasmaoberfläche ($n q_a$) bzw. auf der Achse (nq_0)gegeben /4/. Dazu ist zu bemerken, daß für zylindrische Plasmen der in (1) definierte q-Wert mit

$$q^* = \frac{B_t \cdot \ell_p}{\bar{B}_p \cdot 2\pi R} = \frac{B_t \cdot r}{\bar{B}_p \cdot R} \quad \text{für kreisförmige Plasmen} \qquad (2)$$

identisch ist ($\bar{B}_p = \oint B_p \, d\ell_p / \ell_p = 4\pi I_t / \ell_p$; ℓ_p poloidaler Plasmaumfang). Das Längsfeld ist homogen ($\beta_t = 1 - B_{ti}^2 / B_{ta}^2 = 0$), während die longitudinale Stromdichte einen parabelförmigen Verlauf hat $j = j_0 (1 - r^2/a^2)$. Der Einfluß der leitenden Wand beim Radius $a_w \geq a$ ist für 3 Fälle berücksichtigt. Man sieht, daß sich die helischen MHD-Moden in 2 Klassen aufteilen.

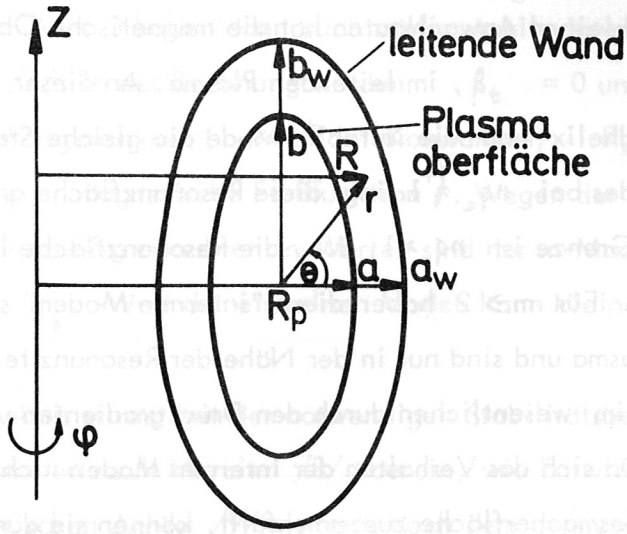

Fig. 1: Toroidales Koordinatensystem

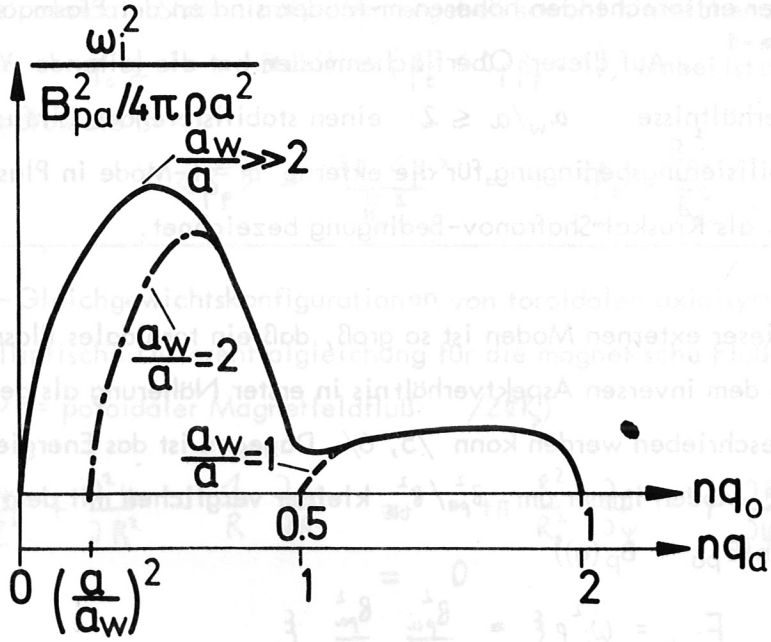

Fig. 2: Dimensionslose Anwachsrate der externen m = 1 Mode als Funktion von nq_o und nq_a für feste ($a_w/a = 1$) und freie Oberflächen ($a_w/a > 1$) (Zylindrisches kreisförmiges Plasma mit $\beta_t = 0$ und Stromdichteverteilung $j \sim 1 - r^2/a^2$)

Der instabile nq-Bereich mit den kleinen Anwachsraten hat die magnetische Oberfläche, auf der $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$ ist , im leitenden Plasma. An dieser Resonanzoberfläche haben die Feldhelix und die instabile Mode die gleiche Steigung. An der unteren Grenze dieses Bandes bei $nq_a \approx 1$ liegt diese Resonanzfläche an der Plasmaoberfläche. An der oberen Grenze ist $nq_0 \approx 1$, d.h. die Resonanzfläche liegt in der Nähe der magnetischen Achse. Für $m \geq 2$ haben diese "internen Moden" stark lokalisierte Eigenfunktionen im Plasma und sind nur in der Nähe der Resonanzstelle $nq = m$ instabil. Die treibende Kraft wird im wesentlichen durch den Druckgradienten und die magnetische Krümmung betimmt. Da sich das Verhalten der internen Moden nicht ändert, wenn die leitende Wand mit der Plasmaoberfläche zusammenfällt, können sie durch die feste Randbedingung $\vec{n}\cdot\vec{\xi} = 0$ beschrieben werden.

Die Instabilität für $nq_a < 1$ ist sehr viel stärker und hat die Resonanzflächen im Vakuum ("externe Moden"), in dem $q \sim r^2$ anwächst: $q(r > a) = q_a\, r^2/a^2$. Die Eigenfunktionen der entsprechenden höheren m-Moden sind an der Plasmaoberfläche lokalisiert: $\xi_r \sim \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}$. Auf dieser Oberflächenmoden hat die leitende Wand für radiale Kompressionsverhältnisse $a_w/a \leq 2$ einen stabilisierenden Einfluß. In der Literatur wird die Stabilisierungsbedingung für die externe m = 1-Mode in Plasmen mit $\beta_t = 0$, $nq_a > 1$, als Kruskal-Shafranov-Bedingung bezeichnet.

Das Energiereservoir dieser externen Moden ist so groß, daß ein toroidales Plasma durch eine Entwicklung nach dem inversen Aspektverhältnis in erster Näherung als gerades zylindrisches Plasma beschrieben werden kann /5, 6/. Dagegen ist das Energiereservoir für die internen $m \geq 2$ Moden immer um B_{pa}^2/B_{ta}^2 kleiner verglichen mit dem der externen helischen Moden ($B_{pa} = B_p(a)$)

$$F_{int} = \omega_i^2 \rho \xi_r = \frac{B_{pa}^2}{4\pi a^2} \frac{B_{pa}^2}{B_{ta}^2} \xi_r .$$

Im Torus kam daher die durch die toroidale Krümmung erzeugte Kraft

$$F_{tor} = \frac{B_{pa}^2}{4\pi a^2} \frac{a^2}{R_p^2} \xi_r$$

für $q \gtrsim 1$ das Auftreten dieser Moden behindern. /5/. Numerische Lösungen der linearisierten MHD-Bewegungsgleichungen für eine "feste Oberfläche" und für ein Aspekt-

verhältnis A = 3 haben dann auch völlig stabile interne helikale Moden für $q_0 > 0{,}9$ gefunden /7/. In der Rechnung wurden $\beta_t = 0$ und $j = \psi\left(\alpha \frac{R_0}{R} - \gamma \frac{R}{R_0}\right)$ mit $j = 0$ am Plasmarand angenommen (α, γ Konstanten, R_0 toroidaler Radius der magnetischen Achse, ψ magnetische Flußfunktion+). Wegen der Resonanzbedingung $n q_0 \approx m$ und den nur ganzzahlig erlaubten n-Werten sind nur m-Moden mit $n \geq m$ möglich und der marginale q_0-Wert der einzelnen Moden kann kleiner 0,9 sein.

Dieses Ergebnis stimmt mit der notwendigen Stabilitätsbedingung für stark lokaliserte Austauschmoden nach Mercier /8/ überein, wie Entwicklungen sowohl in der Nähe der magnetischen Achse /9/ als auch nach dem inversen Aspektverhältnis /10/ gezeigt haben. Auch diese Moden werden durch die toridale Krümmung stabilisiert. Dagegen erlaubt ein hinreichendes Stabilitätskriterium in der Nähe der magnetischen Achse /11/ ohne poloidale bzw. mit diamagnetischen poloidalen Strömen kein stabiles kreisförmiges Plasma ($\beta_t \geq 0; \beta_p \geq 1$; siehe Fig. 9). Treten wie im Tokamak mit rein ohmscher Heizung paramagnetische poloidale Ströme auf, dann ergeben sowohl hinreichendes als auch notwendiges Kriterium für $q_0 \gtrsim 1$ Stabilität ($\beta_t < 0; \beta_p < 1$). Dabei ist das über die Plasmafläche gemittelte poloidale ß

$$\langle \beta_p \rangle = \frac{8\pi \langle p \rangle}{\bar{B}_{pa}^2} = 1 + \langle \beta_t \rangle \frac{B_{ta}^2}{\bar{B}_{pa}^2} .$$

+) Die MHD-Gleichgewichtskonfigurationen von toroidalen axialsymmetrischen Plasmen können durch die elliptische Differentialgleichung für die magnetische Flußfunktion ψ beschrieben werden (ψ = poloidaler Magnetfeldfluß $/2\pi R_p$)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial R} = -4\pi \frac{R^2}{R_p^2}\frac{\partial p}{\partial \psi} - F\frac{\partial F}{\partial \psi} \quad \text{im Plasma}$$

$$= 0 \quad \text{im Vakuum}$$

Der Druck p und der poloidale Stromfluß $F = \frac{R}{R_p} B_t$ hängen nur von ψ ab. Diese Differentialgleichung wird unter der Bedingung, daß die Plasmaoberfläche eine Flußfläche ist und daß dort Druckgleichgewicht existiert, gelöst. Konstante ψ-Werte beschreiben dann die magnetischen Oberflächen ($\psi = 0$ auf Plasmaoberfläche). Die toroidale Stromdichteverteilung ist durch $j = -\left(\frac{1}{4\pi}\frac{R_p}{R} F \frac{\partial F}{\partial \psi} + \frac{R}{R_p}\frac{\partial p}{\partial \psi}\right)$ gegeben. Für $j \sim \frac{R}{R_p}$ und $j \sim \frac{R}{R_p}\psi$ ergeben sich in zylindrischer Näherung eine konstante Stromdichte, bzw. eine nahezu parabelförmige Stromdichte $j \sim 1 - \frac{r^2}{a^2}$.

3. Oberflächenmoden (externe Kink-Moden)

Das Stabilitätsverhalten der externen helikalen MHD-Moden wird bei gegebenen Magnetfeldern am Plasmarand und fester Geometrie durch die Plasmaleitfähigkeit, die longitudinale Stromdichteverteilung und den Plasmadiamagnetismus ($0 \leq \beta_t \leq 1$) bestimmt. Der Einfluß der Kompressibilität des Plasmas ist für die stromgetriebenen externen Moden im Gegensatz zu den internen Moden vernachlässigbar /12/. Wegen des großen instabilen Potentials soll zunächst ein zylindrisches Plasma mit unendlicher Leitfähigkeit und ein Vakuum zwischen Plasma und leitender Wand betrachtet werden.

3.1 Einfluß der Stromdichteverteilung

Die m = 1 Mode beschreibt eine starre Versetzung der Plasmasäule (ξ_r = konst. für $0 \leq r \leq a$) und hängt im Gegensatz zu den $m \geq 2$ Moden nicht von der Stromdichteverteilung, sondern nur vom gesamten Längsstrom I_t im Plasma ab /5/. Die in Fig. 2 gezeigten Anwachsraten der externen m = 1 Mode (für $\beta_t = 0$) folgen der allgemeinen Dispersionsbeziehung

$$\omega_i^2 = \frac{1}{4\rho_\ell}\left[-(2-\beta_t)(ka)^2 B_{ta}^2 + 4k\, B_{ta} I_t - (B_{pa} - ka B_{ta})^2 \frac{2\left(\frac{a}{a_w}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{a_w}\right)^2}\right] \quad (3)$$

$$= \frac{B_{pa}^2}{4\rho_\ell}\left[-(2-\beta_t)(nq_a)^2 + 2nq_a - (1-nq_a)^2 \frac{2\left(\frac{a}{a_w}\right)^2}{1-\left(\frac{a}{a_w}\right)^2}\right]$$

(ρ_ℓ Linienmasse). An der Resonanzstelle $nq_a = 1$, die auf der Resonanzfläche $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$ liegt, ist kein stabilisierender Wandeinfluß vorhanden. Die instabile Plasmahelix und die Feldhelix sind "austauschbar", ohne das äußere Magnetfeld zu verformen und Ströme in der leitenden Wand zu induzieren. Das gleiche gilt für alle höheren m-Moden an der Resonanzstelle $m = nq_a$.

Der Einfluß der Stromdichteverteilung auf die $m \geq 2$ Moden soll zunächst für ein homogenes Längsfeld im Gefäß untersucht werden, d.h. es wird $\beta_t = 0$ gesetzt. Die einzelnen Moden sind dann instabil für /5, 6, 12, 13/

$$m - \Delta(nq_a) + \Delta\left(\frac{a}{a_w}\right) \leq nq_a \leq m \quad (4).$$

Der Einfluß der leitenden Wand ist für eine homogene Stromdichteverteilung j = konst.

$$\Delta\left(\frac{a}{a_W}\right) = \left(\frac{a}{a_W}\right)^{2m}$$

d.h. für $m \geq 2$ und realistische Kompressionsverhältnisse $\frac{a_W}{a} > 2$ ist der stabilisierende Wandeinfluß vernachlässigbar und wird im folgenden nicht mehr berücksichtigt.
Der instabile Bereich $\Delta(nq_a)$ hängt dann nur noch von der Stromdichteverteilung im Plasma ab. Für eine homogene Stromdichte j_0 ist $q \sim \frac{r^2}{\int_0^r j r dr}$ im Plasma ebenfalls konstant, $q = \frac{B_t}{2\pi R_p j_0}$, und $\Delta(nq_a) = 1$. Fällt die Stromdichte radial nach außen zu ab dann steigt q radial an. Fig. 3 zeigt $\Delta(nq_a)$ für $\frac{a_W}{a} > 2$ als Funktion des Verhältnisses q_a/q_0, das durch die Stromdichteverteilung bestimmt wird.

Fällt die Stromdichte zur Plasmaoberfläche hin ab, dann kann die Stromdichteverteilung durch die Funktion

$$j = j_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^u\right]^w \qquad \text{für } r \leq a$$

dargestellt werden. Daraus ergibt sich $q_a/q_0 = w+1$ für $u = 2$ und $q_a/q_0 = \frac{u+2}{u}$ für $w = 1$. Eine zunehmende Stromkonzentration auf der Achse führt zur Stabilisierung der höheren m-Moden. Entsprechend gilt für $m \gg 1$ und $j_a = 0$ die Näherung /14/ $(j_a = j(r=a))$

$$\Delta(nq_a) < m e^{-mQ} \quad \text{mit} \quad Q = -\frac{B_{pa}}{\pi a^2 (\partial j/\partial r)_a} \qquad (5),$$

d.h. kleine Stromdichtegradienten am Plasmarand ergeben stabile hohe m-Moden. Dagegen wird die m = 1 Mode, wie bereits erwähnt, durch die Änderung der Stromdichteverteilung nicht beeinflußt und nur durch den Gesamtstrom in Plasma bestimmt.

Ist die Stromdichte am Plasmarand $j_a \neq 0$, dann ist für gleiche q_a/q_0 der instabile Bereich größer, wie die entsprechende Kurve in Fig. 3 für $j = j_0 e^{-\varkappa^2 r^2/a^2}$ zeigt /5/.+)
In der linearisierten Stabilitätstheorie können die externen Moden für $j_a \neq 0$ durch die Stromkonzentration auf die Achse nicht stabilisiert werden. Für hohe m-Moden gilt jetzt die Näherung /14/

$$\Delta(nq_a) \approx j_a \frac{2\pi a}{B_{pa}} = j_a / \langle j \rangle \quad \text{mit} \quad \langle j \rangle = I_t/\pi a^2.$$

+) Für $\varkappa > 0$ bzw. $q_a/q_0 > 1$ fällt die Stromdichte im Plasmaaußenbereich $(r > a)$ genügend schnell auf Null ab, sodaß externe Moden auftreten können.

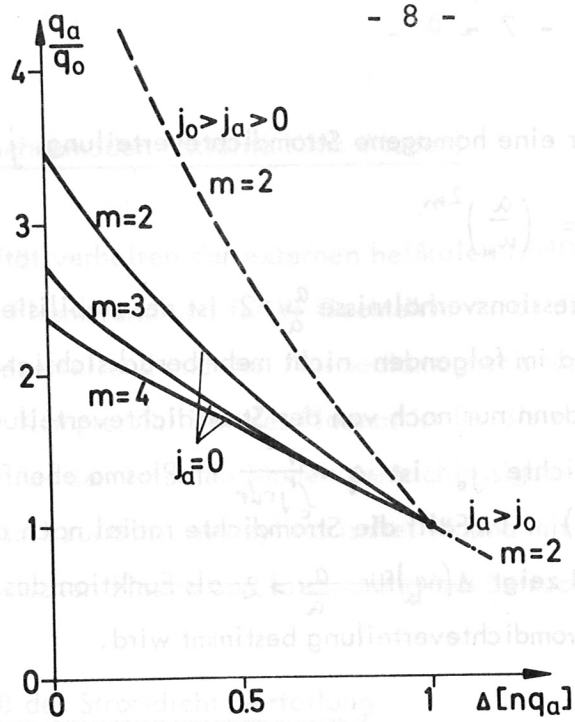

Fig. 3: Instabile Bereiche $\Delta(nq_a)$ der externen Kink-Moden als Funktion von q_a/q_o für ein zylindrisches kreisförmiges Plasma ohne leitende Wand ($\beta_t = 0$). j_c und j_a sind die longitudinalen Stromdichten auf der magnetischen Achse und am Plasmarand. q_o und q_a sind die entsprechenden q-Werte (Nach /5,6,12,13/).

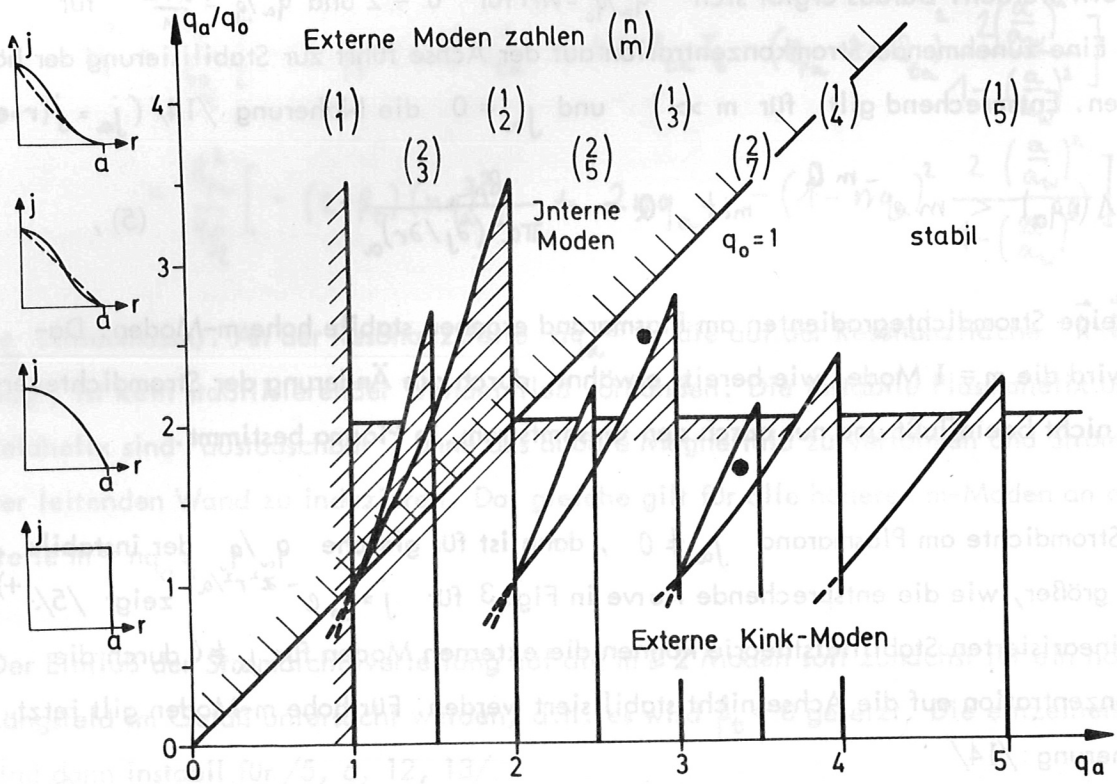

Fig. 4: Stabilitätsdiagramm für ein zylindrisches, kreisförmiges Plasma ohne leitende Wand ($\beta_t = 0$). q_o und q_a sind die Sicherheitsfaktoren auf der magnetischen Achse und am Plasmarand. Die gezeigten Stromdichteverteilungen entsprechen den ganzzahligen q_a/q_o-Werten. (Nach /5,6,12,13/). ● : stabile toroidale Konfiguration nach /5/ mit A = 2,5 und b/a = 1,6.

In Fig. 4 wird das Stabilitätsverhalten aller Kink-Moden für $j_a = 0$ als Funktion von q_a/q_o und von q_a gezeigt. Mit zunehmendem q_a bzw. abnehmendem Plasmastrom werden immer höhere m-Moden instabil und benötigen zur Stabilisierung weniger auf die Achse konzentrierte Ströme. Für $q_a < 2$ muß die Verscherung zur Stabilisierung der $m = 2$ Mode so groß werden, daß der q-Wert auf der Achse kleiner 1 wird und die Stabilitätsbedingung für die interne $m = 1$ Mode verletzt wird. Außerdem gibt es für $q_a/q_o < 2$ bei zylindrischen Plasmen keine "Stabilitätsfenster", da höhere m-Moden mit mehreren Wellenlängen auf den toroidalen Umfang ($n > 1$) die für $n = 1$ vorhandenen stabilen Bereiche "auffüllen". So sind in Fig. 4 die Moden mit $n = 2$ zusätzlich eingezeichnet. Da kurzwellige Moden mit $n > m/q_a$ stabil sind, kann die toroidale Wellenzahl nur die Werte $1 \leq n < \frac{m}{q_a}$ annehmen. Diese $m \geq 2$ Moden haben jeodch für $q_a/q_o > 1$ immer kleinere instabile Bereiche und entprechend verringerte Anwachsraten und Potentiale.+) Die instabile Kraft und die durch die toroidale Krümmung erzeugte Kraft (s. Abschmitt 2) sind daher für $\Delta(nq_a) < 2/A$ vergleichbar. Stabilisierende toroidale Kräfte können daher nicht mehr vernachlässigt werden und ergeben wieder "Stabilitätsfenster" bzw. völlige Stabilität bei hohen q_a-Werten.

Die Stabilitätsrechnungen für kreisförmige Plasmen in toroidaler Geometrie bestätigen die analytischen Ergebnisse für große Aspektverhältnisse /15, 16, 17/. Mit abnehmendem

---

+) Dies folgt aus der Dispersionsbeziehung für die Oberflächenmoden, die ohne Wandterm für $ka < m$ immer folgende Form hat (vergl. (3))

$$\omega_i^2 = \frac{B_{pa}^2}{4\rho_\ell}\left[-f_1(\beta_t)(nq_a)^2 + f_2(m,j,\beta_t)\,nq_a - f_3(m,j)\right].$$

Dabei berücksichtigt der erste Term die bei der Plasmabewegung aus der Verformung der longitudinalen Magnetfelder resultierende stabilisierende Kraft. Der zweite Term ergibt sich aus den durch die Verformung entstehenden destabilisierenden Lorentzkräften. Und der dritte Term beschreibt die stabilisierende Verformung des poloidalen Feldes in Plasma (tritt für starre $m = 1$ Versetzung nicht auf). Es ist nun immer die maximale Anwachsrate direkt proportional zum instabilen nq_a-Bereich

$$\omega_{i,max}^2 = \frac{B_{pa}^2}{4\rho_\ell}\,\frac{f_1}{4}\,\Delta^2(nq_a).$$

Aspektverhältnis führt die Berechnung des Energieintegrals mit konstanter Stromdichte ($j \sim R$) und $\beta_t = 0$ zu einer Abnahme des für Stabilität notwendigen q-Wertes ($q_a \gtrsim 3$ für A = 8) /17/. Da des Energieintegral mit Testfunktionen gelöst wurde, die den Eigenfunktionen der entsprechenden zylindrischen Plasmen ähnlich sind, können nur Aspektverhältnisse mit A > 6 und kleine diamagnetische poloidale Ströme behandelt werden. In dem als stabil definierten q_a-Bereich haben die für die verwendeten Testfunktionen noch vorhandenen Instabilitäten vernachlässigbare Anwachsraten (mindestens um eine Größenordnung niedriger als die Anwachsrate im instabilen Bereich). Es kann allerdings nicht ausgeschlossen werden, daß die exakten Eigenmoden auch für größere q-Werte noch instabil sind.

Eine exakte Lösung der MHD Bewegungsgleichungen in toroidaler Geometrie, ohne Einschränkung bezüglich des Aspektverhältnisses und der Elliptizität /7/, ergibt für $j \sim R$, A = 2,5 und nahezu kreisförmiges Plasma ($\frac{b}{a} = 1.6$) im Bereich von $q_a \gtrsim 3,4$ ebenfalls eine extreme Verringerung der Anwachsraten ($q_a/q_0 = 1,7$). Für $j \sim R\psi$ und $j_a \neq 0$ ergibt sich ein $q_a/q_o = 2,5$ und für $q_a > 2,8$ völlige Stabilität. Alle externen $m \geqslant 2$ Moden sind stabil für $j \sim R\psi$ und $j_a = 0$ ($q_a / q_o = 4,8$), und die Stabilität der Konfiguration wird durch die internen Moden bestimmt. Diese sind für $q_o \gtrsim 0,9$ stabil und dem entspricht ein $q_a \gtrsim 4.3$. Diese stabilen Konfigurationen sind in Fig. 4 ebenfalls eingetragen und bestätigen im wesentlichen das aus der Zylindernäherung gewonnene Stabilitätsdiagramm, in dem jetzt q_a/q_o und q_a auch durch toroidale Effekte beeinflußt werden. So entstehen durch die Verschiebung der magnetischen Oberflächen gegeneinander und den Verlust der Kreisgeometrie ein zusätzlicher Verscherungseffekt und damit verringerte instabile Kräfte. Für eine nahezu konstante Stromdichteverteilung ($j \sim R$) und $\beta_t = 0$ ist im Torus

$$\frac{q_a}{q_o} = \left(1 + \frac{\Delta}{R_p}\right)^3 \left[\frac{2A}{(A^2-1)^{3/2}} + \frac{2A}{(4A^2-1)^{1/2}}\right] \qquad (6)$$

verglichen mit $q_a / q_o = 1$ in der zylindrischen Näherung. $\Delta = R_o - R_p$ ist die Versetzung der magnetischen Achse (Radius R_o) gegen den Mittelpunkt des Plasmaquerschnitts beim Radius R_p ($A = R_p / a$)und wächst mit 1/A an. Da diese zusätzliche Verscherung nur schwach von der Stromdichteverteilung abhängig ist, kann Gleichung (6) für $\beta_t = 0$ auch als Näherung für das Verhältnis von q_a zur zylindrischen Näherung $q_a^* = \frac{B_{ta} \cdot a}{B_{pa} R_p}$

benützt werden. Fig. 5 zeigt, daß dieser toroidale Effekt für $A > 5$ vernachlässigbar ist und bei $A = 2,5$ nahezu eine Verdoppelung von q_a ergibt, obwohl der Plasmastrom in beiden Fällen gleich ist.

Die Voraussetzung für das Auftreten der externen "freien Oberflächenmoden" ist der Vakuumbereich zwischen stromführendem Plasma und der Wand. Existiert zwischen der Plasmasäule und der leitenden Wand kein Vakuum, sondern ein unendlich leitfähiges Plasma, dann treten keine externen Moden auf, da das äußere Magnetfeld im Plasma "eingefroren" ist. Ist innerhalb und außerhalb des Stromkanals ein Plasma mit endlicher Leitfähigkeit, so ist eine nichtlokalisierte helische Instabilität auch in einem Plasma mit festen Randbedingungen möglich. Die Oberflächenmoden werden zu Tearing-Moden, die mit einer durch die dissipativen Effekte gegebenen Zeitskala anwachsen. Für das Auftreten dieser Moden ist der q-Wert auf der Achse /5, 18/ entscheidend (vergl. interne Moden):

$$m - \Delta(nq_o) \leq nq_o \leq m \qquad (7).$$

Bei konstanter Stromdichteverteilung ($q_a = q_o$) sind die instabilen nq_o-Bereiche für die Tearing und freien Oberflächen-Moden gleich: $\Delta(nq_o) = 1$. Für radial abfallende Stromdichteprofile ist $\Delta(nq_o) > 1$ und die instabilen Bereiche überlappen sich.

Die Stabilisierung der Tearingmoden mit höheren m ist ebenfalls wieder durch eine Konzentration der Stromdichte auf die magnetische Achse möglich. Darüberhinaus führt die realistische Annahme eines gut leitfähigen Plasmas bis zum Radius a_L innerhalb des Stromkanals und einer endlichen Leitfähigkeit außerhalb zur völligen Stabilität, wenn $q(a_L)/q_o \geq 2$ und $q_c > 1$ ist (Vermeidung der m = 1 Tearingmode). Je mehr also der Längsstrom in Achsennähe fließt, ein desto kleinerer Bereich mit hochleitfähigem Plasma reicht zur Stabilisierung aus. Das leitfähige Plasma im Außenbereich führt hier zu einem stabilerem Verhalten als mit Vakuum, da die instabilen "Spitzen" im Stabilitätsdiagramm der Fig.4 für $q_a/q_o > 2$ verschwinden.

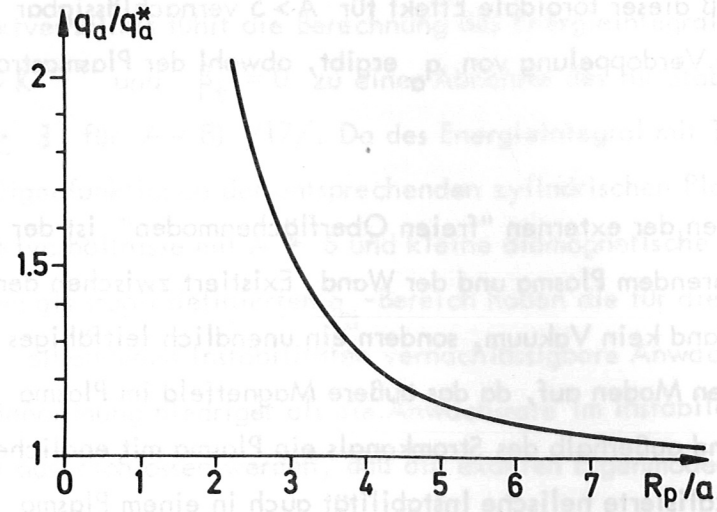

Fig. 5: Verhältnis des Sicherheitsfaktors q_a am Plasmarand zu q_a^* (aus der Zylindernäherung) als Funktion des Aspektverhältnisses A (kreisförmiger Plasmaquerschnitt, $\beta_t = 0$). Die Stromdichte auf der magnetischen Achse und die Stromdichteverteilung sind festgehalten.

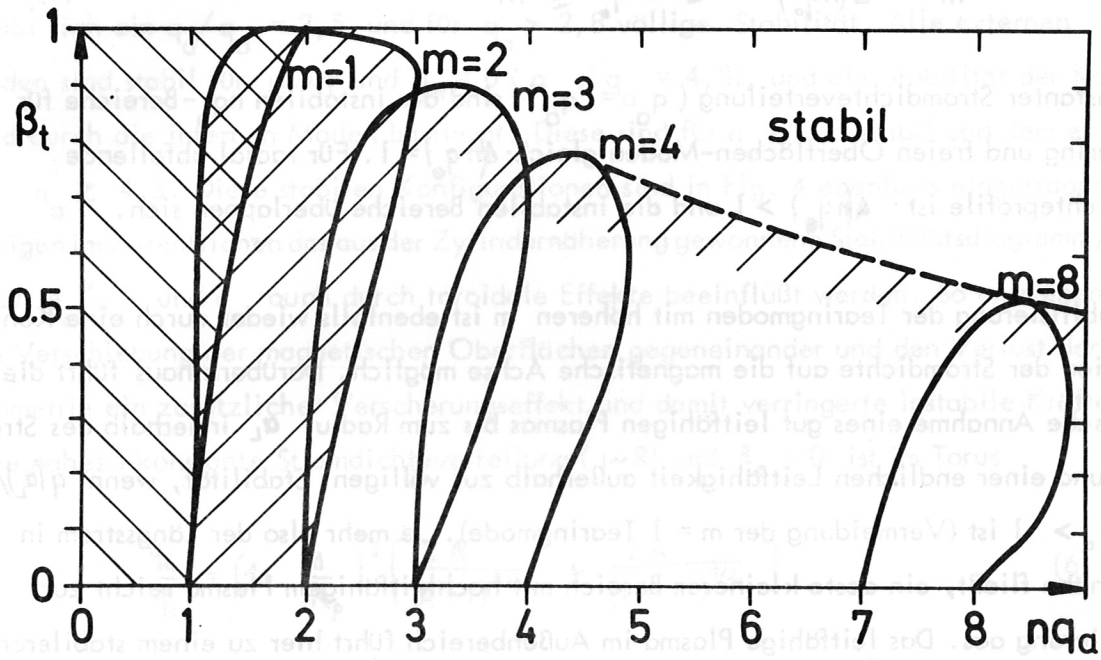

Fig. 6: Stabilitätsdiagramm der externen Kink-Moden für ein zylindrisches kreisförmiges Plasma mit homogener longitudinaler Stromdichteverteilung als Funktion von β_t und nq_a (ohne leitende Wand).

3.2 Einfluß von diamagnetischen poloidalen Strömen

Im Folgenden soll der Einfluß eines inhomogenen longitudinalen Feldes auf die Stabilität der externen Moden beschrieben werden, wobei zwischen Plasma und Wand wieder ein Vakuumbereich liegen soll. Fig. 6 zeigt die instabilen Bereiche der Oberflächenmoden, wenn auch das Längsfeld zum Plasmaeinschluß beiträgt $(B_{ti} < B_{ta}; \beta_t > 0)$ /3/. Die Längsstromdichte und das Längsfeld im Plasma sind homogen verteilt und entprechend ist für $\beta_t = 0$ der instabile Bereich aller m-Moden $\Delta(nq_a) = 1$ (vergl. Fig. 3, 4). Die Dispersionsbeziehung für beliebige β_t ist

$$\omega_i^2 = \frac{B_{pa}^2}{4\rho_\ell}\left[-(2-\beta_t)(nq_a)^2 + 2\left\{m + (m-1)\sqrt{1-\beta_t}\right\}nq_a - 2(m^2-m)\right]$$

Für $\beta_t > 0$ werden die instabilen Bereiche zunächst größer, da das stabilisierende Längsfeld im Plasma abnimmt (1. Term). Andererseits nehmen auch die treibenden instabilen Lorentzkräfte im Plasmainneren ab (2. Term). Deshalb ergibt sich für höhere m's Stabilität bei hohen β_t -Werten. Der q-Verlauf ist jetzt im Plasma konstant und hat an der Plasmaoberfläche einen positiven Sprung, der durch

$$q_a / q_o = B_{ta} / B_{ti} = 1/\sqrt{1-\beta_t} \geq 1$$

gegeben ist. Die für Stabilität notwenigen Werte von q_a und q_a / q_o können aus der Fig. 7 bestimmt werden. Vergleicht man die Stabilitätsdiagramme in Fig. 4 und Fig. 7, so fällt auf, daß das Stabilitätsverhalten eines kreisförmigen, zylindrischen Plasmas mit $j_a = 0$ und $q_a > q_o$ in recht guter Näherung durch das Verhältnis q_a / q_o beschrieben wird. Dies ist nur schwach davon abhängig, ob q_a / q_o durch die Stromdichteverteilung $j(r)$ oder die longitudinale Feldverteilung $B_t(r)$ bestimmt wird!

Betrachten wir nun Plasmen mit einer nach außen hin zunehmenden longitudinalen Stromdichteverteilung, wie sie in der Anfangsphase einer Entladung bei der Zündung des Längsstromes auftritt. Dieser Fall hat die Besonderheit, daß q eine zweiwertige Funktion des Radius ist und ein Minimum am Plasmarand hat: $q_o > q_a$. Es sind also für jeden q-Wert an der Plasmaoberfläche externe und interne Moden mit gleichem m möglich. Die internen Moden werden im folgenden nicht mehr berücksichtigt, da sie für $q_a > 1$ durch toroidale Effekte stabilisiert werden sollten (siehe Abschnitt 2). Für $\beta_t = 0$ und eine endliche Strom-

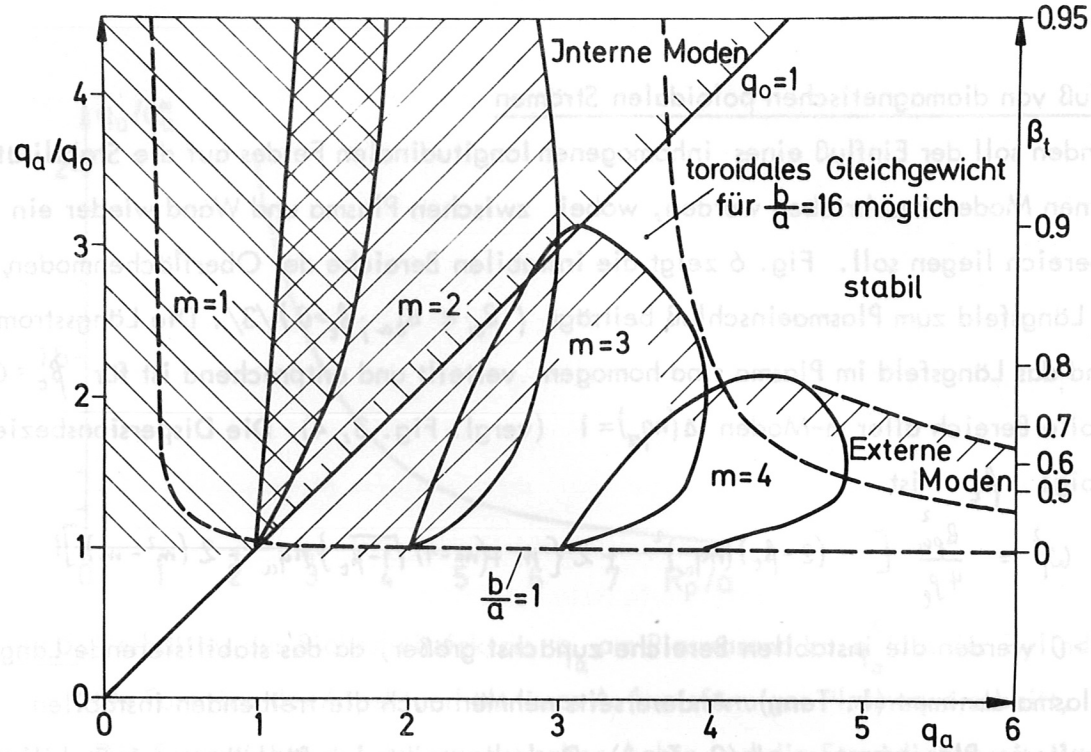

Fig. 7: Stabilitätsdiagramm für ein zylindrisches kreisförmiges diamagnetisches Plasma mit homogener longitudinaler Stromdichteverteilung (ohne leitende Wand). Die im toroidalen Gleichgewicht erreichbaren toroidalen ß-Werte für den kreisförmigen ($b/a = 1$) und einen nichtkreisförmigen ($b/a = 16$) Plasmaquerschnitt sind für ein Aspektverhältnis A = 5 eingetragen (s. Gl. (9)).

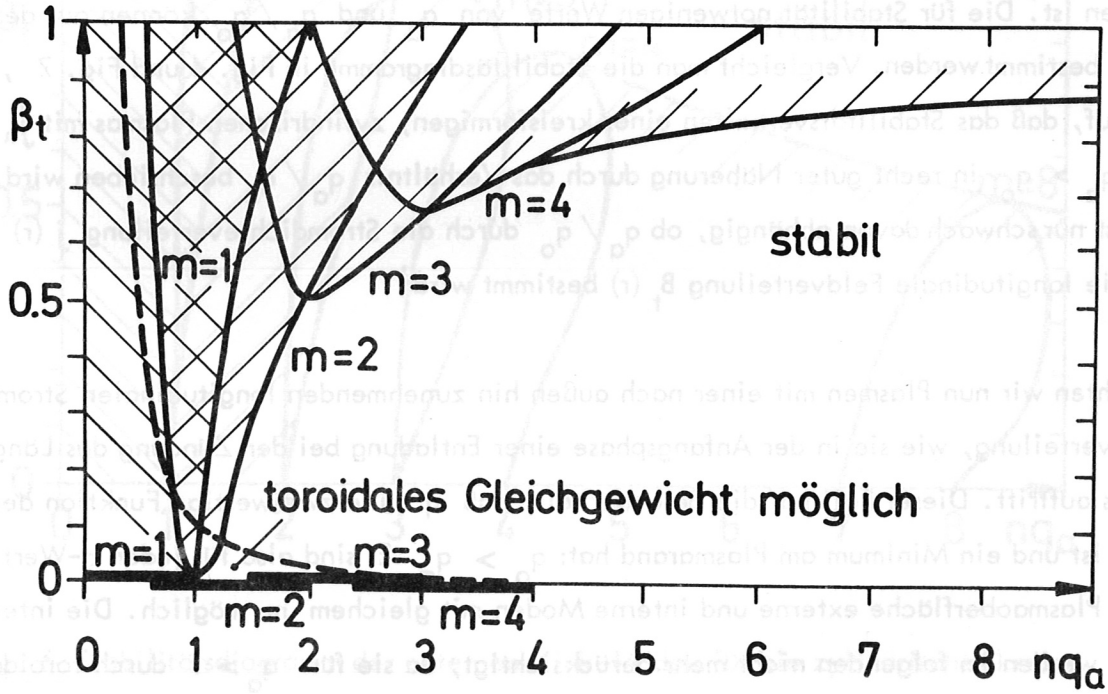

Fig. 8: Stabilitätsdiagramm der externen Kink-Moden für zylindrische kreisförmige Plasmen mit Oberflächenströmen (ohne leitende Wand) /3/. Bei $\beta_t = 0$ sind die instabilen Bereiche für die longitudinale Stromdichteverteilung $j \sim (r/a)^{\nu}$ (für $r < a$) im Grenzübergang $\nu \to \infty$ eingezeichnet /13/.

dichte auf der Achse ($j_0 \neq 0$) ist q_0 endlich und die instabilen Bereiche sind größer als bei konstanter Stromdichte /12/ (siehe Fig. 3). Um die Stabilität für auf die Oberfläche konzentrierte Ströme I_t zu untersuchen, kann die Stromdichte durch Parabeln höherer Ordnung beschrieben werden: $j = j_a (r/a)^\nu$ für $r \leq a$. Der q-Wert auf der Achse geht dann gegen unendlich und die instabilen Bereiche der verschiedenen $m \geq 2$ Moden wachsen mit ν an /13/. Beim Grenzübergang zum reinen Oberflächenstrom ($\nu \to \infty$) sind die instabilen Bereiche maximal und überlappen sich. Dies ist im Gegensatz zu den Lösungen der linearisierten MHD-Bewegungsgleichungen mit reinem Oberflächenstrom /2, 19/ (Fig. 8 zeigt die instabilen nq-Bereiche), die für $\beta_t = 0$ und $nq_a > 1$ Stabilität vorhersagen. Die Ergebnisse des Grenzübergangs $\nu \to \infty$ sind in Fig. 8 auf der Achse $\beta_t = 0$ eingetragen. Der Unterschied zwischen den beiden Resultaten ließe sich für niedere m-Moden durch die unterschiedlichen radialen Profile der instabilen Eigenmoden verstehen. Während im Oberflächemodell $\xi_r \sim r^{m-1}$ gefunden wurde, ergab sich für die Stromprofile $j \sim r^\nu$ eine an der Oberfläche lokalisierte Störung, so daß die stabilisierenden Effekte vom Plasmavolumen kleiner sind. Für höhere m-Moden gleichen sich aber beide Störfunktionen einander an. Da trotzdem die Rechnungen mit Stromdichteverteilungen, die mehr oder weniger stark vom Oberflächenstrom abweichen, für $m \geq 2$ zu völlig anderen Stabilitätskriterien führen, sollten Rechnungen mit longitudinalen Oberflächenströmen nicht zur Deutung der Experimente benützt werden. Entgegen den Rechnungen mit homogener Stromdichte sind dann auch Plasmen mit Oberflächenstrom bei hohen β_t für alle q_a-Werte instabil.

Die Stabilität der m = 0 Moden hängt nur schwach von der Stromdichteverteilung ab. Näherungsweise gilt für die gefährlichste m = 0, k = 0 Mode bei einer konstanten Stromdichteverteilung die Stabilisierungsbedingung

$$B_{ti} > 0{,}75\, B_{pa} \quad \text{bzw.} \quad \beta_t < 1 - \frac{3}{4}\frac{B_{pa}^2}{B_{ta}^2}$$

Ist $B_{ta} > 3\, B_{pa}$ so darf $\beta_t > 90\,\%$ sein.

dichte auf der Achse ($j_0 \neq 0$) ist q_0 endlich und die instabilen Bereiche sind größer als bei konstanter Stromdichte /12/ (siehe Fig. 3). Um die Stabilität für auf die Oberfläche konzentrierte Ströme I_t zu untersuchen, kann die Stromdichte durch Parabeln höherer Ordnung beschrieben werden: $j = j_a (r/a)^\nu$ für $r \leq a$. Der q-Wert auf der Achse geht dann gegen unendlich und die instabilen Bereiche der verschiedenen $m \geq 2$ Moden wachsen mit ν an /13/. Beim Grenzübergang zum reinen Oberflächenstrom ($\nu \to \infty$) sind die instabilen Bereiche maximal und überlappen sich. Dies ist im Gegensatz zu den Lösungen der linearisierten MHD-Bewegungsgleichungen mit reinem Oberflächenstrom /2, 19/ (Fig. 8 zeigt die instabilen nq-Bereiche), die für $\beta_t = 0$ und $nq_a > 1$ Stabilität vorhersagen. Die Ergebnisse des Grenzübergangs $\nu \to \infty$ sind in Fig. 8 auf der Achse $\beta_t = 0$ eingetragen. Der Unterschied zwischen den beiden Resultaten ließe sich für niedere m-Moden durch die unterschiedlichen radialen Profile der instabilen Eigenmoden verstehen. Während im Oberflächemodell $\xi_r \sim r^{m-1}$ gefunden wurde, ergab sich für die Stromprofile $j \sim r^\nu$ eine an der Oberfläche lokalisierte Störung, so daß die stabilisierenden Effekte vom Plasmavolumen kleiner sind. Für höhere m-Moden gleichen sich aber beide Störfunktionen einander an. Da trotzdem die Rechnungen mit Stromdichteverteilungen, die mehr oder weniger stark vom Oberflächenstrom abweichen, für $m \geq 2$ zu völlig anderen Stabilitätskriterien führen, sollten Rechnungen mit longitudinalen Oberflächenströmen nicht zur Deutung der Experimente benützt werden. Entgegen den Rechnungen mit homogener Stromdichte sind dann auch Plasmen mit Oberflächenstrom bei hohen β_t für alle q_a-Werte instabil.

Die Stabilität der m = 0 Moden hängt nur schwach von der Stromdichteverteilung ab. Näherungsweise gilt für die gefährlichste m = 0, k = 0 Mode bei einer konstanten Stromdichteverteilung die Stabilisierungsbedingung

$$B_{ti} > 0{,}75\, B_{pa} \quad \text{bzw.} \quad \beta_t < 1 - \frac{3}{4} \frac{B_{pa}^2}{B_{ta}^2}$$

Ist $B_{ta} > 3\, B_{pa}$ so darf $\beta_t > 90\,\%$ sein.

4. Erreichbare ß-Werte für stabile kreisförmige Plasmen

Zusammenfassend können für toroidale Plasmen mit kreisförmigem Querschnitt und $B_{ta} > B_{pa}$ zwei stabile Bereiche der externen Moden unterschieden werden

1) $$q_a < (a/a_W)^2 < 1$$

2) $$q_a \gtrsim 2 \quad \text{und} \quad q_a/q_0 \gtrsim 2 .$$

Bei kleinen q_a-Werten und entsprechend hohem β (siehe unten) arbeitet der Screw-pinch, um die langwelligen $m = 1$ Moden mit der leitenden Wand zu stabilisieren. Dabei können interne Moden nur durch Längsströme an der Plasmaoberfläche ($q_o > 1$) vermieden werden. Lokalisierte Moden am Plasmarand ($q_a < 1$) und externe Moden mit $m \geq 2$ und mehreren Wellenlängen auf dem toroidalen Umfang ($n > 1$) müssen dann durch stark verscherte Felder an der Plasmaoberfläche oder durch "endliche Lamorradien"-Stabilisierung unterdrückt werden.

Bei hohen q_a-Werten arbeitet das Tokamak, bei dem aber die mit dem toroidalen Plasmaeinschluß verträglichen β -Werte sehr niedrig sind. Das zum toroidalen Gleichgewicht nötige Vertikalfeld führt nämlich zu einer das Plasma umgebenden Seperatrix mit einem zwischen Plasma und großer Torusachse gelegenen Stagnationspunkt. Zur Vermeidung einer zweiten magnetischen Achse auf der Torusinnenseite des Plasmarings, darf das über die Plasmafläche gemittelte poloidale β

$$\langle \beta_p \rangle = \frac{8\pi \langle p \rangle}{\overline{B}_{pa}^{\,2}} \lesssim \frac{A}{2}$$

nur von der Größenordnung des Aspektverhältnisses R_p / a sein. /2/ Diese Grenze für $\langle \beta_p \rangle$ ist nur schwach von der Plasmastromverteilung abhängig. In diesem Grenzfall geht der Sicherheitsfaktor q_a auf der toroidalen Plasmaoberfläche gegen unendlich, da das poloidale Feld auf der Torusinnenseite gegen Null geht (s. Def. (1)). Dies bedeutet nicht wie im Niedrigbetafall ($\langle \beta_p \rangle \lesssim 1$), daß Gleichgewichte nur mit beliebig kleinen longitudinalen Strömen möglich sind. Denn für toroidale Plasmen mit diamagnetischen Strömen und $\langle \beta \rangle \geq \frac{1}{3} \frac{1}{q_a^2} \frac{1}{A}$ sind q_a und Plasmastrom nicht mehr umgekehrt proportional zueinander /2/. Letzteres gilt nur bei zylindrischen Plasmen oder näherungsweise bei toroidalen Plasmen mit $\langle \beta_p \rangle \approx 1$ und $A > 5$ (vergl. Abschnitt 3.1

und Fig. 5), bei denen $q_a \approx q_a^* \sim 1/I_t$ ist. Das nur mit diamagnetischen poloidalen Strömen erreichbare maximale $\langle\beta\rangle$, das für $\bar{B}_{ta}^2 \gg \bar{B}_{pa}^2$ gleich dem $\langle\beta_t\rangle$ ist, ist im toroidalen Gleichgewicht gegeben durch

$$\langle\beta\rangle = \frac{8\pi\langle p\rangle}{\bar{B}_{ta}^2+\bar{B}_{pa}^2} = \frac{a^2}{R_p^2}\left(\frac{\bar{B}_{pa}}{a}\frac{R_p}{\bar{B}_{ta}}\right)^2 \frac{\langle\beta_p\rangle}{1+\bar{B}_{pa}^2/\bar{B}_{ta}^2} \tag{8}$$

$$\approx \frac{a^2}{R_p^2}\frac{1}{q_a^{*2}}\langle\beta_p\rangle \lesssim \frac{1}{2}\frac{1}{q_a^{*2}}\frac{a}{R_p}$$

Für $A > 5$ und $\langle\beta\rangle \leq \frac{2}{3}\langle\beta\rangle_{max}$ ist aber $q_a \approx q_a^*$, sodaß die durch das toroidale Gleichgewicht gegebene obere Grenze von $\langle\beta\rangle$ näherungsweise mit den Stabilitätskurven von Fig. 6, 7 und 8 verglichen werden kann. Für reine Oberflächenströme ergibt sich damit $\langle\beta\rangle \lesssim 0{,}2/A$, während andere Stromdichteverteilungen für $A > 5$ nur ein $\langle\beta\rangle < 0{,}1/A$ $(q_a > 2)$ zulassen. Für $A = 2{,}5$ erlaubt der zusätzliche toroidale Verscherungseffekt bereits für $\langle\beta_p\rangle = 1$ wesentlich höhere β-Werte, nämlich $\langle\beta\rangle \approx 5\,\%$ /7/. Dieser günstige Wert ergibt sich jedoch nur für die in Abschnitt 3.1 festgelegte relativ flache Stromdichteverteilung mit $q_a / q_o = 2{,}5$. Ändert sich die Stromdichteverteilung, dann muß $\langle\beta\rangle$ abnehmen, da dann zur Stabilisierung der externen oder internen Moden höhere q_a - Werte und kleinere Plasmaströme erforderlich sind. Wächst wie in den bisherigen Tokamak-Experimenten bei festgehaltenem bzw. ansteigendem Plasmastrom die Stromdichte nach wenigen ms auf der Achse an, so treten bei endlicher Leitfähigkeit resistive Tearingmoden auf $(nq_o = m)$. Bei genügend hoher Leitfähigkeit wird auf jeden Fall für $q_o < 1$ die interne $m = 1$ Mode instabil. Das nichtlineare Verhalten dieser Instabilitäten wird dann auch für die Erklärung der Disruptive-Instabilität herangezogen /20/.

Eine weitaus größere Freiheit bezüglich der Stabilität und der erreichbaren β-Werte bietet sich durch das Verlängern des poloidalen Plasmaumfangs, d.h. durch nichtkreisförmige "vertikale" Plasmaquerschnitte mit $b > a$, an (Fig. 1). Bei gleichem Stabilitätsverhalten (gleiche kritische q_a-Werte) wie im Kreis und festgehaltenem toroidalen Feld kann $\langle\beta\rangle$ dann um das quadratische Verhältnis der poloidalen Umfänge vom elongierten und kreisförmigen Querschnitt erhöht werden. Bei vorgegebenem Halbachsenverhältnis $b/a > 1$ gilt nahezu unabhängig von der Stromdichteverteilung und der genauen Plasmaform

$$\langle\beta\rangle \lesssim \frac{1}{2}\frac{1}{q_a^{*2}}\frac{a}{R_p}\frac{b^2+a^2}{2a^2} \tag{9}$$

Dabei ist

$$q_a^* = \frac{B_{ta}}{2\pi R_p} \frac{\pi a b}{I_t} \frac{b^2 + a^2}{2ab} \qquad (10)$$

wieder gleich dem q_a-Wert in der linearen Näherung. Diese durch das toroidale Gleichgewicht gegebene Grenze für $\langle\beta\rangle$ ist für den kreisförmigen und einen stark nichtkreisförmigen Plasmaquerschnitt ($\frac{b}{a}$ = 16) in Fig. 7 eingezeichnet (A = 5). Danach könnte bei gleichem Stabilitäsverhalten ein nichtkreisförmiges Plasma für eine konstante Stromdichteverteilung und ein großes Aspektverhältnis ($A \geq 5$) bei hohem $\langle\beta\rangle \gtrsim 70\,\%$ stabil sein. Diese stabilisierende Wirkung der diamagnetischen poloidalen Ströme für $q_a > 2$ kann dagegen ein kreisförmiges Plasma im toroidalen Gleichgewicht nicht ausnützen.

Zusätzlich ergeben sich für elongierte Plasmen noch weitere Vorteile gegenüber den kreisförmigen Plasmen. Die toroidale Stromdichte wächst nach (10) mit $\frac{b}{a}$ an

$$\langle j \rangle = \frac{B_{ta}}{2\pi R_p} \frac{1}{q_a^*} \frac{b^2 + a^2}{2ab}$$

und ermöglicht eine effektivere ohmsche Heizung. Nach der neoklasischen Theorie sollte die Ionentemperatur sowohl im Plateau als auch im Bananen-Regime mit $\frac{b}{a}$ bzw. mit $(\frac{b}{a})^2$ ansteigen /21/. Die Energieeinschlußzeit und die Stabilität gegen Mikroinstabilitäten hängt für alle diskutierten Modelle und Moden nur schwach von $\frac{b}{a}$ ab, wobei elongierte Querschnitte leichte Verbesserungen bringen sollten /22/.

Im nächsten Abschnitt soll nun die Frage der MHD Stabilität von nichtkreisförmigen Plasmaquerschnitten diskutiert werden.

5. MHD-Stabilität von nichtkreisförmigen Plasmen

Die bisher durchgeführten Stabilitätsrechnungen für nichtkreisförmige Plasmaquerschnitte behandeln meistens Plasmen ohne diamagnetische poloidale Ströme ($\langle\beta_p\rangle \leq 1$).

5.1. Lokalisierte Moden und interne Kink-Moden

Notwendige und hinreichende Stabilitätskriterien für lokalisierte Austausch- und Ballooning-Moden ergeben sich auch hier durch Entwicklungen in der Nähe der magnetischen Achse /9, 11/ oder nach dem inversen Aspektverhältnis für flache Stromdichteverteilungen /10/. In Fig. 9 werden die kritischen q-Werte auf der magnetischen Achse als Funktion des Halbachsenverhältnisses der inneren magnetischen Oberflächen angegeben. Dieses "innere" Halbachsenverhältnis und die Form der inneren Oberflächen weicht für zum Plasmarand hin abfallende Stromdichteverteilungen und ellipsenähnliche Querschnitte erheblich vom Halbachsenverhältnis und von der Form der Plasmaoberläche ab (siehe auch Abschnitt 5.2). Die Aussagen bezüglich der Plasmaform beziehen sich deshalb im folgenden Abschnitt immer auf Oberflächen in der Nähe der magnetischen Achse und sind mit dem Index " 0 " gekennzeichnet. Ohne poloidale Ströme ($\langle\beta_p\rangle = 1$) erlaubt das notwendige Kriterium nur für schwache Abweichungen von der Kreisform ($(\frac{b}{a})_o < 3$) zusammen mit einer Dreiecksverformung des Plasmaquerschnitts, deren Spitze zur Torusaußenseite gerichtet ist ($\Delta > 0$), einen kritischen Wert von $q_o \approx 1$ wie im Kreisfall. Dagegen kann das hinreichende Stabilitäskriterium /11/ erst für $(\frac{b}{a})_o > 1.4$ und hohe q-Werte erfüllt werden. Für $(\frac{b}{a})_o > 3$ stimmen notwendiges und hinreichendes Stabilitätskriterium immer besser überein, und der kritische q_o-Wert muß mit wachsendem $(\frac{b}{a})_o$ ansteigen. Für $(\frac{b}{a})_o = 10$ ist ohne Dreiecksverformung ein $q_o > 10$ nötig, während mit einer vom Gleichgewicht her gerade noch erlaubten dreieckigen Verformung ein $q_o \approx 4$ ausreicht ($A = 6$).

Wesentlich günstiger ist das Stabilitätsverhalten für elliptische Plasmen mit diamagnetischen poloidalen Strömen, die zur Erreichung von möglichst hohen β -Werten auch im Tokamak nötig sind ($\langle\beta_p\rangle > 1$). Sowohl notwendiges /9/ als auch hinreichendes /11/ Stabilitätskriterium ergeben dann für $\langle\beta_p\rangle = 2$ und $(\frac{b}{a})_o > 2$ bei $q_o \gtrsim 0{,}7$ Stabilität, während ein kreisförmiges Plasma die hinreichende Stabilitätsbedingung nicht erfüllen kann. Ein Tokomak mit $\beta_p > 1$ braucht deshalb zumindest schwach nichtkreisförmige Plasmaquerschnitte,

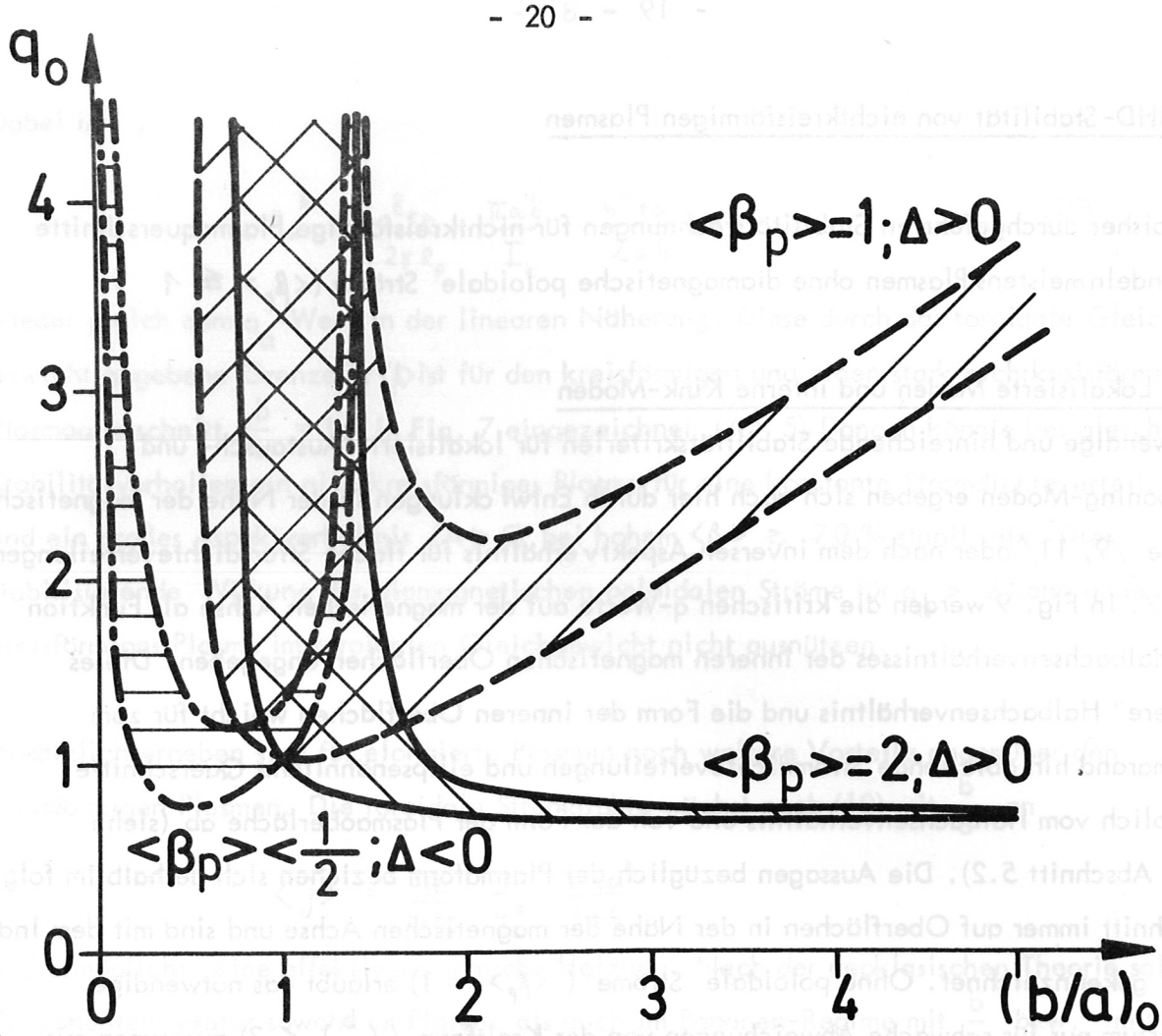

Fig. 9: Kritische q_o-Werte für lokalisierte Moden und nahezu elliptische Plasmaquerschnitte in der Nähe der magnetischen Achse. Die den drei β_{pol}-Werten entsprechenden Kurven geben das notwendige (untere Kurve) /9,11/ und hinreichende (obere Kurve) /10/ Stabilitätskriterium an.

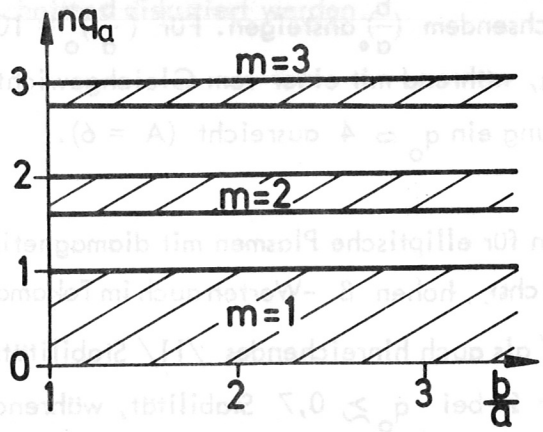

Fig. 10: Stabilitätsdiagramm der externen Kink-Moden für zylindrische elliptische Plasmen mit einer longitudinalen Stromdichteverteilung $j \sim \psi$ als Funktion des Halbachsenverhältnisses b/a an der Plasmaoberfläche ($\beta_t = 0$).

die auch für die Ausnützung von axialsymmetrischen Divertoren günstig sind. Die notwendigen Stabilitätsuntersuchungen sollten aber nicht mit ohmisch geheizten Plasmen und den entsprechenden kleinen β_p -Werten durchgeführt werden (z.B. Doublett, Fingering-Tokamak). Dagegen können diese Plasmen mit $\langle\beta_p\rangle < \frac{1}{2}$ im Kreisfall für $q_o \gtrsim 1$ hinreichend stabil sein, wie es auch die bisherigen-Tokamak-Experimente gezeigt haben. Sogar "horizontale" Ellipsen (b<a) können für $\langle\beta_p\rangle < \frac{1}{2}$ durch geeignete Wahl des q_o-Wertes und einer mit der Spitze zur Torusachse gerichteten Dreiecksverformung ($\Delta < 0$) stabil sein. Fig. 9 zeigt deutlich den günstigen Einfluß sowohl der diamagnetischen Ströme und der Dreicksverformung mit $\Delta > 0$ für "vertikale" Ellipsen als auch der paramagnetischen Ströme und $\Delta < 0$ für horizontale Ellipsen.

Für die internen Kink-Moden haben alle bisher durchgeführten toroidalen Rechnungen für Halbachsenverhältnisse $\frac{b}{a} < 10$ Stabilität bei

$$q_o = \frac{B_t}{2\pi R_p} \frac{1}{j_o} \frac{b^2+a^2}{2ab} \gtrsim 1 \qquad (11)$$

ergeben /7, 17, 23/. Dabei wurden sowohl konstante ($j \sim R$) als auch radial abnehmende ($j \sim R\psi$) Stromdichteverteilungen angenommen. Der Plasmaquerschnitt war elliptisch /7, 17/ oder rechteckig /23/. Zusätzliche diamagnetische Ströme können auch für diese Moden bei gegebenem $\frac{b}{a}$ den notwendigen q_o-Wert verringern /17/. Elongierte Plasmaquerschnitte sollten also bei geeigneter Stromverteilung gegen lokalisierte und interne Kink-Moden durch die Bedingung $q_o \gtrsim 1$ stabil sein. Wieweit der Plasmadruck bzw. der maximal erreichbare $\langle\beta\rangle$ -Wert und die Stromdichte durch Elongation des Plasmaquerschnitts erhöht werden können, hängt daher entscheidend vom Stabilitätsverhalten der externen Kink-Moden ab.

5.2 Externe Kink-Moden

Auch für nichtkreisförmige "vertikale" Plasmaquerschnitte lassen sich die externen Kink-Moden für $\beta_t = 0$ durch eine Konzentration des toroidalen Stromes auf die magnetische Achse bzw. durch eine hinreichend große Verscherung (gegeben durch q_a/q_o) stabilisieren /21/. Zum Erreichen des notwendigen q_a/q_o-Wertes steht hier aber zusätzlich zu den diamagnetischen poloidalen Strömen (s. Abschnitt 3.2) und einer geeigneten toroidalen

Stromdichteverteilung (wie im Kreis) eine Variation des Halbachsenverhältnisses b/a der magnetischen Oberfläche im Plasmainneren zur Verfügung (vergl. Gl. (10) und (11). Beide Möglichkeiten sind allerdings nicht unabhängig voneinander ausnützbar, da bei gegebener Form der Plasmaoberfläche die toroidale Stromdichteverteilung die Halbachsenverhältnisse der inneren Oberflächen bestimmt. So sind bei elliptischen Plasmen mit $\beta_t = 0$ und mit einer homogenen Stromdichteverteilung die inneren magnetischen Oberflächen ähnliche Ellipsen mit gleichem b/a und q ist konst. bzw. $q_a = q_o$ /14, 24/. Für die radial nach außen abfallende Stromdichteverteilung $j \sim \psi$ ($j_a = 0$) nimmt das Halbachsenverhältnis der Gleichgewichtsflächen zur Plasmaachse hin ab /21/. Beide Effekte zusammen führen zu q_a/q_o-Werten, die mit der Elliptizität der Plasmaoberfläche anwachsen und wesentlich höher als in kreisförmigen Plasmen mit der gleichen Stromdichteverteilung sind. So ist z.B. für b/a = 3 an der Plasmaoberfläche das Halbachsenverhältnis in der Nähe der magnetischen Achse rund 2 und der Wert von $q_a/q_o \approx 6{,}6$ verglichen mit 2,3 im Kreisfall. Für diese zylindrischen elliptischen Plasmen ist die Laplacegleichung separierbar, und es exisitieren analytische Stabilitätsrechnungen für die beiden angegebenen Stromdichteverteilungen j = konst. und $j \sim \psi$.

Die Ergebnisse lassen sich qualitativ gut verstehen und zeigen, daß die Ellipse nicht die optimale nichtkreisförmige Plasmaform ist. Allgemein gilt für $\beta_t = 0$ wieder die Instabilitätsbedingung (4).

Die bereits im Kreisfall ungünstige konstante Stromdichteverteilung (keine Verscherung) ergibt für elliptische Plasmen ein deutlich verschlechtertes Stabilitätsverhalten /14, 24/. Die instabilen Bereiche der verschiedenen m-Moden sind größer als im Kreisfall, $\Delta(nq_a) > 1$, und wachsen mit $\frac{b}{a}$ an, d.h. die instabilen Bereiche überlappen sich. Für m > 2 gilt unabhängig von m

$$\Delta(nq_a) \approx \frac{b^2+a^2}{2ab}$$

Dieses instabilere Verhalten mit wachsendem $\frac{b}{a}$ wird durch die zunehmende Krümmung des poloidalen Feldes an den Plasmaenden erklärt, die die Kink-Moden treibt (Krümmungsradius $R_K = a^2/b$). Einflüsse der leitenden Wand (konfokale Ellipse zur Plasmaoberfläche) treten wieder bei kleinem Wandabstand auf ($a_w/a \leq 2$) und nehmen bei konstantem Wandabstand a_w/a mit wachsendem $\frac{b}{a}$ ab. Zur Modenzahl m ist zu bemerken, daß die instabilen Eigenmoden für nichtkreisförmige oder stark toroidale Plasmen nicht durch eine

einzige poloidale Fourierkomponente beschrieben werden können. Im Gegensatz zum kreisförmigen Zylinder tritt immer eine Verkoppelung von mehreren Fourierkomponenten auf. Die Modenzahl m ist dann durch die Form der Eigenfunktion bestimmt und gibt die Zahl der Nullstellen von $\vec{n}\cdot\vec{\xi}$ auf der Plasmaoberfläche an. Mit zunehmendem q_a entstehen nach Gleichung (4) an der Plasmaoberfläche immer mehr Nullstellen von $\vec{n}\cdot\vec{\xi}$ und im Plasmavolumen die gleiche Zahl von Knotenpunkten im $\vec{\xi}$-Feld.

Für $j \sim \psi$ ($j_a = 0$, $\beta_t = 0$) ergibt sich das interessante Resultat, daß das Stabilitätsverhalten der externen Moden wie im Kreisfall ist: die instabilen (nq_a)-Bereiche sind nicht größer als im Kreis (s. Fig. 10) /21/. Die von der Abnahme des Krümmungsradius herrührenden destabilisierenden Effekte werden offensichtlich durch die entsprechend anwachsenden q_a/q_o-Werte dieses Gleichgewichts kompensiert. Andererseits führt diese starke Verscherung bei festgehaltenem q_a zu so kleinen q-Werten in der Nähe der magnetischen Achse, daß der Instabilitätsbereich der internen Moden erreicht wird. Erfüllt man die Stabilisierungsbedingung der internen Moden, $q_o \gtrsim 0{,}7$ bzw. 1, so muß q_a für elliptische Plasmen und radial abfallende Stromdichteverteilungen mit b/a ansteigen. Bei diesen hohen q_a-Werten werden elliptische Plasmen mit großen Halbachsenverhältnissen bereits durch geringe toroidale Effekte gegen externe Moden stabil, da $\Delta(nq_a) \ll 1$ wird+).

Entsprechend ist die Stabilisierungsbedingung für alle Stromdichteverteilungen, die stärker als $j \sim \psi$ nach außen abfallen, durch das notwendige q_o gegeben. Für schwächer abfallende Stromdichteprofile tritt Stabilität bei gegebenem b/a erst für q_a-Werte auf, die größer sind als der kritische q_a-Wert von $j \sim \psi$. Dieses Verhalten ist analog zum kreisförmigen Zylinder, bei dem für $j \sim \psi$ das Verhältnis $q_a/q_o = 2{,}3$ ist (Fig. 4). Diese Erhöhung des für Stabilität notwendigen q_a-Wertes mit $\frac{b}{a}$ erlaubt für elliptische Plasmen mit $\beta_t = 0$ bei $\frac{b}{a} \approx 2$ einen knapp doppelt so hohen $\langle\beta\rangle$-Wert wie im Kreisfall. Für größere b/a nimmt $\langle\beta\rangle$ wieder ab und kann sogar kleiner als im Kreisfall werden.

+) Für hohe q_a-Werte gilt nämlich wieder die Näherung /14/

$$\Delta(nq_a) \lesssim m\, e^{-mQ}$$

$$\text{mit } Q = 4\pi \left.\frac{\frac{d}{d\psi}\left(\ln \oint \frac{dl_p}{B_p}\right)}{(dj/d\psi) \oint \frac{dl_p}{B_p}}\right|_{\psi=\psi_a} . \qquad (12)$$

Für $j \sim \psi$ ist $\quad Q = 0{,}692\left(1 + 3{,}6\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 + \dots\right) \quad$ für $\frac{b}{a} \lesssim 1{,}5$

und $\quad Q = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{b^2/a^2}{1+2a/b} \quad$ für $\frac{b}{a} \gg 1$.

Diese Stabilitätsuntersuchungen für elliptische Plasmen deuten darauf hin, daß eine mit b/a zunehmende Krümmung an den Plasmaenden und die entsprechenden instabilen Kräfte vermieden werden müssen. Dann sollten zur Stabilität der internen und externen Moden eine schwächere Verscherung (kleinere q_a/q_o-Werte) und geringere q_a-Werte ausreichen. Gleichgewichte dieser Art ergeben sich für Plasmaquerschnitte, die der Rennbahnform ähneln (Halbkreise an den Enden, d.h. von b/a unabhängige konstante Krümmung an den Plasmaenden mit $R_k = a$). Für $j \sim \psi$ (radial abfallende Stromdichteverteilung) sind dann die Halbachsenverhältnisse der inneren Oberflächen im Gegensatz zu elliptischen Plasmen nahezu konstant, d.h. man hat auch im Plasmainneren langestreckte Oberflächen. Dadurch wird der radiale q-Verlauf wie im Kreisfall durch die Stromdichteverteilung allein bestimmt, so daß das Verhältnis q_a/q_o für gleiche Stromdichteverteilungen $j(R, \psi)$ nahezu unabhängig von $\frac{b}{a}$ ist /23, 25/. Auch für diese Gleichgewichte kann das notwendige Stabilitätskriterium für lokalisierte Moden in der Nähe der magnetischen Achse erfüllt werden /25/. Beide Effekte zusammen - geringere instabile Kräfte durch die nahezu konstante Krümmung an den Plasmaenden und kleine q_a/q_o-Werte für die notwendige Verscherung - sollten daher bei wesentlich kleineren Werten von q_a, wie sie für elliptische Plasmaquerschnitte notwendig sind, stabile elongierte Plasmen erlauben. Eine Stabilitätsuntersuchung unter Berücksichtigung dieser günstigen Voraussetzungen liegt bisher nicht vor.

Erste toroidale Stabilitätsrechnungen für nahezu elliptische Plasmaquerschnitte wurden mit Testfunktionen zur Berechnung des Energieintegrals durchgeführt /16,17/ (s. Abschnitt 3,1). Die Testfunktionen wurden gegenüber dem Kreis durch einen Fourierreihenansatz verallgemeinert und die freien Konstanten durch Minimalisierung von δW bestimmt. Für eine nahezu homogene longitudinale Stromdichteverteilung ($j \sim R$) und Aspektverhältnisse zwischen 6 und 20 ist der für Stabilität notwendige q_a-Wert für elliptische Plasmaquerschnitte nur unwesentlich höher als für kreisförmige Plasmen. Zusätzlich wird die in der Zylindernäherung gefundene Überlappung der instabilen q-Bereich für die verschiedenen m-Moden bereits bei A = 20 durch toroidale Effekte vermieden. Die in /17/ postulierte Verschlechterung der Stabilität von elliptischen Plasmaquerschnitten (etwas größere instabile q_a-Bereiche, geringerer Einfluß der leitenden Wand für $a_w/a < 1,2$) ist für $\frac{a_w}{a} > 2$ und in dem q_a-Bereich mit vernachlässigbaren Anwachsraten nicht gerechtfertigt. Einschränkend muß noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die verwendeten Testfunktionen nur für den kreisförmigen Zylinder exakt sind und deshalb sowohl für kleine Aspektverhältnisse als auch für elongierte Plasma-

querschnitte ein zu günstiges Stabilitätsverhalten vortäuschen. Dennoch wird die im Vergleich zum zylindrischen Fall deutlich stabilisierende Wirkung der toroidalen Geometrie zumindest für die benützten Testfunktionen sichtbar.

Nimmt der Plasmadiamagnetismus zu ($2 > \langle\beta_p\rangle > 1$), so ergeben die mit Testfunktionen durchgeführten toroidalen Rechnungen eine deutliche Verbesserung der Stabilität. Dieses Verhalten tritt im Torus bereits bei wesentlich kleineren diamagnetischen Strömen und β_t-Werten auf, als zu den in Abschnitt 3.2 gezeigten stabilisierenden Effekten bei $\beta_t > 50$ % notwendig wären. Die Stabilisierung für $\langle\beta_p\rangle > 1$ ist deshalb im wesentlichen auf das zum toroidalen Gleichgewicht notwendige zusätzliche Vertikalfeld zurückzuführen, das im Kreisfall für $\langle\beta_p\rangle \approx A/2$ zu sehr großen Werten von q_a bzw. q_a/q_o und einer entsprechend hohen Verscherung führt (vgl. Abschnitt 4). Für diese Werte von β_p und den entsprechend hohen β_t- Werten existieren noch keine Stabilitätsrechnungen mit longitudinalen Volumenströmen.

Mit reinen Oberflächenströmen ergeben die Lösungen der Bewegungsgleichungen wie im Kreisfall eine Verschlechterung des Stabilitätsverhaltens mit wachsendem $\langle\beta_p\rangle$. Zusätzlich nimmt der zur Stabilität notwendige q_a-Wert mit b/a zu und ist für $\langle\beta_t\rangle < 0.1$

$$q_a \geq 1 + \alpha \left(\frac{b}{a} - 1\right)^{\gamma} \tag{13}$$

α und γ hängen von der Gleichgewichtsform ab und liegen zwischen $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$ und $1.15 \leq \gamma \leq 1{,}67$. Die oberen Werte gelten für elliptische Plasmen, während die unteren Werte für eine Rennbahnform des Plasmaquerschnitts gelten /2/.
Die Verbesserung des Stabilitätsverhaltens für die Rennbahnform gegenüber der Ellipse ist wohl wieder auf die von $\frac{b}{a}$ unabhängige konstante Krümmung an den Plasmaenden zurückzuführen. Elliptische Querschnitte erlauben danach bei b/a = 2,2 um einen knappen Faktor 2 höhere ß-Werte als im Kreis: $\langle\beta\rangle \lesssim 0{,}38 \frac{a}{R}$. Für größere b/a nimmt $\langle\beta\rangle$ auch hier wieder ab. Auch die Rennbahnform erlaubt diese Erhöhung von $\langle\beta\rangle$ gegenüber kreisförmigen Plasmen. Der maximale Wert wird aber erst für $\frac{b}{a} > 3$ erreicht und bleibt für alle größeren Halbachsenverhältnisse erhalten.

Auch gegenüber den externen Kink-Moden mit $k = 0$ ($n = 0$) und $m = 1, 3, 5, \ldots$ sind Plasmen mit von der Ellipse abweichenden Plasmaquerschnitten und mit Volumenströmen wesentlich stabiler als Plasmen mit elliptischen Querschnitten und Oberflächenströmen /26/.

So ist die gefährlichste dieser Moden, die eine vertikale Verschiebung des gesamten Plasmas beschreibt ($m = 1$, $k = 0$), bei elliptischen Gleichgewichten für alle $\frac{b}{a} > 1$ instabil, während nahezu rechteckige Plasmaquerschnitte erst für $\frac{b}{a} \gtrsim 4$ instabil werden. Das instabile Potential der $k = 0$ Moden ist aber wesentlich kleiner als das der $k \neq 0$ Moden, sodaß diese $k = 0$ Moden sehr leicht durch passive Leiter oder Feedback-Methoden stabilisiert werden können. Nach /26/ ist

$$\omega_{i,k=0} \approx \frac{1}{500} \frac{B_{pa}}{\sqrt{\mu_0 \rho a^2}}$$

Die $k = 0$ Moden mit geradem m sind dagegen immer stabil /14/.

Elongierte Plasmaquerschnitt mit endlicher Leitfähigkeit und hohen q-Werten am Plasmarand sind wie beim Kreis gegen Tearingmoden mit hohem m instabil. In der Nähe der magnetischen Achse werden diese Moden wieder durch einen radial ansteigenden q-Verlauf stabilisiert ($j_a = 0$). Liegen die resonanten Flächen in der Nähe der Plasmaoberfläche dann sind die instabilen q-Bereiche symmetrisch zu $nq_a = m$ und die notwendige Bedingung für $|\Delta(nq_a)|$ ist analog zu (12) /14/.

Zusammenfassend kann beim Vergleich mit kreisförmigen Plasmen festgestellt werden, daß die elongierten Plasmaquerschnitte keine Verschlechterung des Stabilitätsverhaltens von internen Kink-Moden zeigen (Stabilisierungsbedingung: $q_o \geq 1$). Die Stabilität von lokalisierten Moden wird verbessert, wenn die für hohe ß-Werte notwendigen diamagnetischen poloidalen Ströme berücksichtigt werden (Stabilisierungsbedingung: $q_o > 0{,}7$). Zur Stabilisierung der externen Kink-Moden sind Plasmaquerschnitte mit einer möglichst kleinen Krümmung an den Enden günstig, wie sie im Experiment (s. Abschnitt 6) und in Gleichgewichtsrechnungen /25/ gefunden werden. Zur Erreichung der notwendigen Verscherung muß die longitudinale Stromdichteverteilung zum Plasmarand hin abfallen. Auch für die externen Moden existiert der stabilisierende Effekt des Plasmadiamagnetismus, wenn von den Oberflächenstrommodellen abgesehen wird.

Abschließend soll noch darauf hingewiesen werden, daß zur Erreichung der MHD-Stabilität der elongierten Plasmaquerschnitte eine Wandstabilisierung offensichtlich nicht erforderlich ist. Die leitenden Wände spielen nur eine Rolle bei der Erzeugung der elongierten Plasmaquerschnitte. Auch eine Larmorradienstabilisierung wurde nicht berücksichtigt, die aber für höhere m-Moden ($m \geq 6$) auch unter Reaktorbedingungen durchaus vorhanden sein kann.

6. Vergleich der Stabilitätsrechnungen mit den Belt-Pinch Experimenten

Erste Vergleiche zwischen den Stabilitätstheorien und dem Experiment können mit den bisher vorliegenden Ergebnissen vom Belt-Pinch I und II durchgeführt werden. Die Einschlußzeiten beider Experimente reichen gerade aus, um in der durch MHD-Instabilitäten gegebenen Zeitskala Aussagen zu machen. Diese Zeiten sind außerdem vergleichbar mit dem Auftreten der Disruptive-Instabilität in Tokamak-Entladungen.

Am Belt-Pinch I /27/ war nach ungefähr 20 μs $\langle\beta_p\rangle \leq 1$ und für Stabilität war dann ein $q_a \approx 3$ bei $A = 5$ und $\frac{b}{a} \approx 5$ nötig. Aus den Magnetfeldprofilen und durch Vergleich mit Gleichgewichtsrechnungen ergab sich ein Verhältnis von q_a / q_o zwischen 1 und 2. Im Oberflächenstrommodell, das für das Experiment mit nach außen hin schwach abfallender Stromdichteverteilung nicht zutrifft, erwartet man bei $\frac{b}{a} \approx 5$ und $\beta_t < 0{,}1$ kritische q-Werte von 7 für elliptische und von 3 für rennbahnförmige Plasmaquerschnitte. Auch für die experimentell gemessene nahezu konstante Stromdichteverteilung ist bei elliptischen Plasmaquerschnitten keine Stabilität gegen externe Kink-Moden zu erwarten. Da aus der axialen Verteilung der poloidalen Felder auf einen mehr rechteckigen oder rennbahnförmigen Plasmaquerschnitt geschlossen werden kann, könnte diese Abweichung von der Ellipse das positive Stabilitätsverhalten erklären. Das kurzzeitige Auftreten von höheren m-Moden bei der Abnahme des q_a-Wertes von 6 auf 3 ist durch die zu Entladungsbeginn auftretende Verlagerung des toroidalen Stroms vom Plasmarand zur Achse erklärbar. Diese Moden können sowohl ideale MHD-Moden als auch resistive Moden sein (siehe Abschnitt 3.1).

Am Belt-Pinch II /1/ war während der ersten 50 μs $\langle\beta\rangle \approx 50$ %. Aus den Sondenmessungen konnten sowohl q_a als auch das Verhältnis von q_a / q_o berechnet werden. Dazu wurde angenommen, daß das Achsenverhältnis aller magnetischen Oberflächen gleich dem der Plasmaoberfläche mit $\frac{b}{a} \approx 14$ ist ($A \approx 7\text{-}8$). Bei stabilem Plasmaverhalten (keine instabile Bewegung während 80 μs feststellbar, d.h. $\omega_i < 5 \cdot 10^4\ s^{-1}$) nahm q_a während der ersten 50 μs der Entladung von 6 auf 3,8 ab.+) Zu Beginn der Entladung ($t \approx 10\,\mu s$) war $q_a / q_o \approx 6$, und für spätere Zeiten kann aus den internen Sondenmessungen für feste Halbachsenverhältnisse nur eine allmähliche Abnahme von q_a / q_o abgeleitet werden.

+) Den q_a-Werten von 6 und 3,8 entsprechen die in der Tokamak-Literatur benützten q_a^*-Werte von 4 bzw. 2,6.

Bei instabilem Verhalten war zu Beginn der Entladung ebenfalls $q_a \approx 6$, fiel dann aber durch eine stärkere axiale Kontraktion auf 1,8 ab (vergl. Gleichung (10)). (Plasmastrom I_t, B_{ta} und R_p waren konstant). Die beobachtete "Zerfaserung" des Plasmas trat nach ungefähr 25 - 30 µs bei $q_a < 3,5$ auf ($\omega_i \approx 2 \cdot 10^5 s^{-1} \approx \bar{B}_{pa}/\sqrt{4\pi\rho a^2}$). Da der genaue q-Verlauf im Plasma nicht bekannt ist, können die Ursachen für das "Zerfasern" des Plasmas sowohl interne als auch externe Moden sein. Berücksichtigt man das toroidale Stabilitätskriterium für die internen und lokalisierten Moden, $q_o \approx 1$, so ergibt sich für die untersuchten Plasmen mit $\frac{b}{a} \approx 14$ für $q_a > 3,5$ und $q_a/q_o \gtrsim 3,5$ Stabilität. Im Oberflächenmodell wären elongierte Plasmen mit $\frac{b}{a} \approx 14$ und $\langle\beta\rangle \approx 50$ % erst für $q_a > 16$ stabil. Auch für die gemessene Stromdichteverteilung ist bei elliptischem Plasmaquerschnitt und $\beta_t = 0$ erst für sehr hohe q_a-Werte Stabilität zu erwarten. Zur Erklärung bleibt auch in diesem Experiment neben dem stabilisierenden Einfluß der hohen diamagnetischen Ströme (vergl. Fig. 6) der experimentelle Hinweis auf einen an den Enden abgeplatteten Plasmaquerschnitt, der die Stabilität günstig beeinflußt. Daneben könnten im Gegensatz zum BP I auch stabilisierende Effekte des endlichen Gyroradius existieren, der um eine Größenordnung kleiner als die kleine Plasmahalbachse a war (BP I: $a/r_{gi} = 100$). Anzumerken ist noch, daß die in beiden Experimenten gefundenen kritischen q_a-Werte quantitativ mit den Ergbnissen der toroidalen Rechnungen übereinstimmen, die nur Testfunktionen anstelle der exakten Eigenmoden benützen. Auch mit den in Fig. 4 und Fig. 7 gezeigten Stabilitätsdiagrammen für kreisförmige Plasmen ist eine grobe Übereinstimmung bezüglich der stabilen q_a und q_a/q_o-Werte zu vermerken. Die nächsten Experimente mit erhöhter Stoßwellenheizung und längeren Einschlußzeiten werden verbesserte Aussagen über die notwendigen q-Werte in Abhängigkeit von ß und $\frac{b}{a}$ ergeben.

Der Autor möchte Herrn Dr. R. Wilhelm für viele hilfreiche Diskussionen danken.

LITERATURVERZEICHNIS

/1/ G. Becker et al., Tokyo 1974, IAEA-CN-33 / paper E 4-1

/2/ J.B. Freidberg, F.A. Haas, Phys. Fluids 17, 440 (1974)
B. Marder, Phys. Fluids, 17, 447 und 634 (1974

/3/ V.D. Shafranov, Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear ReactionsIV (Pergamon Press), p. 71 (1960)

/4/ W. Grossmann, S. Ortolani, IPP Report 1/132 (1973)

/5/ V.D. Shafranov, Sov. Phys. Techn. Phys. 15, 175 (1970)

/6/ E.A. Frieman et al., Phys. Fluids 16, 1108 (1973)

/7/ J.A. Wesson, A. Sykes, Tokyo Conf. 1974, IAEA-CN-33/A 12 - 3

/8/ C. Mercier, Nucl. Fusion Suppl. Pt. 2, 801 (1962)

/9/ L.S. Solovev, Soviet Phys. JETP 26, 400 (1968)

/10/ G. Laval, M. Luc, E. Maschke, C. Mercier, R. Pellat, Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Research (IAEA,Vienna 1971) II, 507

/11/ D. Lortz, J. Nührenberg, Nucl. Fusion 13, 821 (1973)

/12/ T. Takeda, Y. Shimoura, M. Ohta, M. Yoshikawa, Phys. Fluids 15, 2193 (1972)

/13/ M. Kruskal, J.L. Johnson, M. Gottlieb, L. Goldmann, Phys. Fluids 1, 421 (1958)

/14/ G. Laval, R. Pellat, J.S. Soule, Phys. Fluids 17, 835 (1974)

/15/ G. Küppers, D. Pfirsch, H. Tasso, Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (IAEA, Vienna 1971), II, p. 529

/16/ W. Kerner, H. Tasso, Tokyo Conf. 1974, IAEA-CN-33/A 13 - 1

/17/ W. Kerner, Internal IPP Report (1975)

/18/ H. Furth, P. Rutherford, H. Selberg, Phys. Fluids 16, 1054 (1973)

/19/ R.J. Tayler, Proc. Phys. Soc. (London) B 70, 31 (1957)

/20/ M. Rosenbluth, R. Dagazian, P. Rutherford, Phys. Fluids 16, 1894 (1973)

/21/ G. Laval, R. Pellat, 6th European Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys., Moscow (1973) Vol. II, p. 64

/22/ B.B. Kadomtsev, "Theoretical Conference on Non-Circular Cross Section Tokamaks: Summary Lecture", Nov. 73, Kurchatov Inst., Moscow

/23/ G. Bateman, W. Schneider, IPP 1/145 (1974),and Tokyo Conf. 1974, IAEA-CN-33/A 12 - 1

/24/ R.L.Dewar, R. Grimm, J. Johnson, E. Frieman, J. Greene, P. Rutherford, Phys. Fluids 17, 930 (1974)

/25/ F. Herrnegger, E.K. Maschke, Nucl. Fusion 14, 119 (1974)
E.K. Maschke, Plasma Phys. 15, 535 (1973)

/26/ M. Okabayashi, G. Sheffield, Nucl. Fusion 14, 263 (1974)
M.D. Rosen, MATT-1063 (1974)

/27/ H. Krause, IPP Report 1/150 (1974)